

# Über die genaue Berechnung von besten $L^1$ -Approximierenden

K. GLASHOFF UND R. SCHULTZ

*Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hamburg,  
D-2000 Hamburg 13, West Germany*

Received October 11, 1977

## 1. EINLEITUNG

Es sei  $C[a, b]$  der reelle Vektorraum der auf dem kompakten Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , stetigen reellwertigen Funktionen. Es sei ein Element  $f \in C[a, b]$  und eine Teilmenge  $V \subset C[a, b]$  gegeben. Das  $L^1$ -Approximationsproblem besteht dann darin, ein Element  $v \in V$  anzugeben, so daß gilt:

$$\int_a^b |(v - f)(\xi)| d\xi \leq \int_a^b |(w - f)(\xi)| d\xi \quad \forall w \in V. \quad (1)$$

Ein Element  $v \in V$  mit (1) heißt  $L^1$ -Minimallösung oder beste  $L^1$ -Approximierende für  $f$  bezüglich  $V$ .  $L^1$ -Approximationsaufgaben treten unter anderem bei der numerischen Behandlung gewisser zeitoptimaler Steuerungsprobleme auf (Krabs [5]).

Für jedes  $v \in V$  setzen wir  $N(v - f) = \{\xi \in [a, b]: (v - f)(\xi) = 0\}$  und bezeichnen mit  $m(v - f)$  die Anzahl der Nullstellen mit Vorzeichenwechsel von  $v - f$  in  $[a, b]$ .

Im folgenden beschäftigen wir uns mit einigen Möglichkeiten,  $L^1$ -Minimalösungen numerisch genau zu berechnen. In den Abschnitten 2 und 3 behandeln wir die lineare  $L^1$ -Approximation. Im Abschnitt 4 gehen wir auch auf nichtlineare Aufgaben ein. Im abschließenden Abschnitt 5 geben wir eine Übersicht über die vorgeschlagenen Verfahren und stellen zwei numerische Beispiele dar.

Die vorgeschlagenen Verfahren bestehen in der Lösung gewisser nichtlinearer Gleichungssysteme, die die Minimalösungen in bestimmten Fällen charakterisieren. Zur Lösung der Gleichungssysteme kann etwa das Newtonsche Iterationsverfahren (bzw. eine seiner Varianten) herangezogen werden. Für die Anwendung des Newton-Verfahrens stellen wir die zugehörigen Funktionalmatrizen auf, erörtern die Bedingungen für ihre Regularität und geben Hinweise für die numerische Lösung der auftretenden linearen Gleichungssysteme.

Die Dimension des charakterisierenden nichtlinearen Gleichungssystems ist im allgemeinen nicht von vornherein bekannt, sondern hängt von gewissen

strukturellen Eigenschaften der Minimallösung  $v$  ab. Die entscheidende Struktur ist dabei das Vorzeichenverhalten der Differenz  $v - f$ ; mit der Anzahl  $m(v - f)$  der Vorzeichenwechsel von  $v - f$  ist auch die Dimension des charakterisierenden Gleichungssystems bekannt. Während bei linearen Problemen der Fall  $m(v - f) = \dim V$  schon häufig untersucht wurde, beschäftigen wir uns darüberhinaus mit dem Fall  $m(v - f) > \dim V$ .

Wird zur Lösung des charakterisierenden Gleichungssystems das Newton-Verfahren verwendet, so muß neben der Zahl  $m(v - f)$  auch eine Näherung für die Minimallösung  $v$  bekannt sein. Eine solche Näherung, die sich z.B. aus der Anwendung eines globalen Näherungsverfahrens gewinnen läßt, kann dann in vielen Fällen aufgrund der guten lokalen Konvergenz des Newton-Verfahrens schnell soweit verbessert werden, daß sich die gesuchte  $L^1$ -Minimallösung im Rahmen der Rechengenauigkeit einer Rechenanlage exakt ergibt. Als globales Näherungsverfahren kommt bei linearen Problemen etwa eine Diskretisierung und die Anwendung des Simplex-Algorithmus, bei nichtlinearen Problemen etwa die Anwendung eines Abstiegsverfahrens mit verallgemeinerten Gradienten in Betracht.

Das hier vorgeschlagene Vorgehen ähnelt den von Gustafson [3] entwickelten Methoden zur Behandlung semi-infinitier Optimierungsaufgaben: zunächst wird die Struktur eines die Optimallösung charakterisierenden Gleichungssystems durch ein global konvergentes (dabei aber im allgemeinen langsames) Verfahren bestimmt und anschließend die Lösung des Gleichungssystems mit einer rasch konvergenten Methode genau berechnet.

## 2. LINEARE $L^1$ -APPROXIMATION.

### EIN CHARAKTERISIERENDES GLEICHUNGSSYSTEM

Das beschriebene Approximationsproblem heißt linear, falls  $V$  ein linearer Teilraum von  $C[a, b]$  ist. Wir setzen im folgenden  $V$  als  $n$ -dimensionalen Teilraum von  $C[a, b]$  voraus ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dazu seien  $v_j \in C[a, b]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , linear unabhängige Funktionen und  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ . Unter dieser Voraussetzung existiert zu jedem  $f \in C[a, b]$  eine  $L^1$ -Minimallösung, die darüberhinaus eindeutig bestimmt ist, falls  $V$  die Haarsche Bedingung erfüllt (siehe z.B. Rice [9]). Wir setzen die Haarsche Bedingung jedoch im allgemeinen nicht voraus. Der folgende Satz liefert nun in bestimmten Fällen eine Charakterisierung der Minimallösungen.

(2) SATZ (siehe z.B. Kripke-Rivlin [6]). *Es sei  $f \in C[a, b]$  und  $v \in V$  mit  $\text{meas } N(v - f) = 0$ . Unter dieser Bedingung ist  $v$  genau dann  $L^1$ -Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$ , wenn gilt:*

$$\int_a^b \text{sgn}((v - f)(\xi)) w(\xi) d\xi = 0 \quad \forall w \in V. \quad \blacksquare$$

Aus Satz (2) folgt:

(3) KOROLLAR. *Es sei  $f \in C[a, b]$  und  $v \in V$  mit  $\text{meas } N(v - f) = 0$ . Es sei  $m := m(v - f) < \infty$  und es seien  $t_i, i = 1, \dots, m$ , mit  $a < t_1 < \dots < t_m < b$  sämtliche Nullstellen mit Vorzeichenwechsel von  $v - f$  in  $[a, b]$ . Unter diesen Bedingungen ist  $v$  genau dann  $L^1$ -Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$ , wenn gilt:*

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} v_j(\xi) d\xi = 0 \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei  $t_0 = a$  und  $t_{m+1} = b$  gesetzt ist. ■

Korollar (3) legt nun zur Lösung einer gegebenen  $L^1$ -Approximationsaufgabe das folgende Vorgehen nahe. Wir setzen voraus, daß für eine Minimallösung  $v \in V$  für  $f$  bezüglich  $V$  die Zahl  $m := m(v - f)$  bekannt ist. Dann betrachten wir zur Ermittlung dieser Minimallösung das folgende  $(n + m)$ -dimensionale nichtlineare Gleichungssystem mit den Unbekannten  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ :

$$G(x, t) = 0 \quad (4)$$

mit  $G(x, t) = (g_1(t), \dots, g_n(t), g_{n+1}(x, t), \dots, g_{n+m}(x, t))^T$  und

$$g_j(t) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} v_j(\xi) d\xi \quad j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$g_{n+i}(x, t) = \sum_{v=1}^n x_v v_v(t_i) - f(t_i) \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

wobei wieder  $t_0 = a$  und  $t_{m+1} = b$  gesetzt ist.

Falls nun  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $t = (t_1, \dots, t_m)$  die Gleichung (4) erfüllen und darüberhinaus  $a < t_1 < \dots < t_m < b$  gilt und ferner die Funktion

$$\sum_{v=1}^n x_v v_v - f$$

genau in den Punkten  $t_i, i = 1, \dots, m$ , das Vorzeichen wechselt, so folgt aus Korollar (3), daß die Funktion

$$v = \sum_{v=1}^n x_v v_v \in V$$

eine  $L^1$ -Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$  ist. Die Lösung der  $L^1$ -Approximationsaufgabe ist dann also durch die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (4) gegeben.

Um das charakterisierende nichtlineare Gleichungssystem (4) aufstellen zu können, benötigt man die Kenntnis der Zahl  $m = m(v - f)$ . Ergibt sich diese Zahl nicht mit Hilfe theoretischer Aussagen (vgl. dazu auch den folgenden Abschnitt), so kann man zu ihrer Bestimmung die Approximationsaufgabe mit einem globalen Verfahren näherungsweise so weit behandeln, daß die Struktur der Minimallösung ausreichend erkennbar ist. Als geeignetes Näherungsverfahren kommt z.B. eine Diskretisierung der Aufgabe mit Hilfe von Quadraturformeln und eine anschließende Behandlung als finites lineares Optimierungsproblem in Frage (siehe z.B. Barrodale–Roberts [1]). Falls das Gleichungssystem (4) etwa mit dem Newton-Verfahren iterativ gelöst werden soll, ist die Anwendung eines globalen Näherungsverfahrens in der Regel auch für die Ermittlung geeigneter Startwerte für  $x$  und  $t$  erforderlich.

### 3. LINEARE $L^1$ -APPROXIMATION. NUMERISCHE VERFAHREN

Wir betrachten zunächst den häufig auftretenden Spezialfall, daß für eine Minimallösung  $v \in V$  die Differenz  $v - f$  genau  $n$ -mal das Vorzeichen wechselt. Im Gleichungssystem (4) ist dann  $m = n$ . In diesem Fall kann häufig das durch die Funktionen (5) gegebene Teilsystem von (4)

$$g_j(t) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} v_j(\xi) d\xi = 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

( $t_0 = a, t_{n+1} = b$ ) unabhängig von den übrigen Gleichungen von (4) gelöst und die Lösung der Approximationsaufgabe sodann durch Interpolation von  $f$  in den Punkten  $t_1, \dots, t_n$  gewonnen werden. Dieser numerisch besonders einfache Fall ist vielfach untersucht worden (siehe z.B. Rice [9]).

Bildet  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ein Tschebyscheff-System in  $C[a, b]$ , so that das Gleichungssystem (7) stets eine eindeutige Lösung  $t = (t_1, \dots, t_n)$  im Bereich

$$D = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n: a < t_1 < \dots < t_n < b\}.$$

Dieses Resultat ergibt sich aus den beiden folgenden Sätzen:

(8) SATZ (Hobby–Rice [4], vgl. Micchelli [8] und Cheney [2]). *Für jedes System  $\{v_1, \dots, v_n\}$  integrierbarer Funktionen auf  $[a, b]$  gibt es  $n$  Punkte  $t_1, \dots, t_n$  mit  $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$ , so daß (7) gilt. ■*

(9) SATZ (Laasonen [7]). *Es sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ein  $n$ -dimensionales Tschebyscheff System in  $C[a, b]$  und  $h$  eine integrierbare Funktion mit*

$$\int_a^b h(\xi) v_j(\xi) d\xi = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

*Dann hat  $h$  mindestens  $n$  Vorzeichenwechsel in  $[a, b]$ . ■*

(10) BEISPIEL (Polynomapproximation auf  $[-1, 1]$ , Laasonen [7]). *Es sei  $a = -1$ ,  $b = 1$  und  $v_j(\xi) = \xi^{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Dann ist die Lösung  $t = (t_1, \dots, t_n)$  von (7) durch die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms zweiter Art  $U_n(\xi)$  gegeben:*

$$t_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \quad i = 1, \dots, n. \quad \blacksquare$$

Für eine große Klasse von Funktionen  $f \in C[a, b]$  ist von vornherein bekannt, daß sich ihre beste  $L^1$ -Approximierende bezüglich eines Tschebyscheff-Systems  $\{v_1, \dots, v_n\}$  durch Interpolation in den Punkten  $t_1, \dots, t_n$  der Lösung von (7) ergibt. Es sind dies die zu  $v_1, \dots, v_n$  adjungierten Funktionen  $f$ , die dadurch definiert sind, daß  $\{v_1, \dots, v_n, f\}$  ein Tschebyscheff-System der Dimension  $n+1$  bildet (bezüglich Verallgemeinerung auf schwache Tschebyscheff-Systeme siehe Micchelli [8]).

Für die numerische Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (7) mit Hilfe des Newton-Verfahrens geben wir noch die Gestalt der Funktionalmatrix an:

$$D \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} v_1(t_1) & \cdots & v_1(t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ v_n(t_1) & \cdots & v_n(t_n) \end{pmatrix} \cdot 2 \operatorname{diag}(-1, 1, \dots, (-1)^n).$$

Diese Matrix ist für  $t \in D$  insbesondere dann stets nichtsingulär, wenn  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ein Tschebyscheff-System bildet. Für die Anwendung des Newton-Verfahrens genügt es jedoch, daß die Matrix in einer Umgebung der gesuchten Lösung  $t = (t_1, \dots, t_n)$  des Gleichungssystems (7) den Rang  $n$  hat. Diese Bedingung ist häufig auch dann erfüllt, wenn  $\{v_1, \dots, v_n\}$  kein Tschebyscheff-System bildet.

Wir betrachten nun den Fall, daß für die gesuchte Minimallösung  $v \in V$  die Differenz  $v - f$  mehr als  $n$ -mal das Vorzeichen wechselt. Im Gleichungssystem (4) ist dann  $m > n$ . In diesem Fall muß das vollständige System (4) behandelt werden.

Die bei der Anwendung des Newton-Verfahrens zur Lösung des vollständigen Gleichungssystems (4) auftretende Funktionalmatrix hat unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit von  $v_1, \dots, v_n$  und  $f$  die folgende Gestalt:

$$DG(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & V \\ V^T & U \end{pmatrix} \cdot 2 \operatorname{diag}(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -1, 1, \dots, (-1)^m) \quad (11)$$

mit

$$V = \begin{pmatrix} v_1(t_1) & \cdots & v_1(t_m) \\ \vdots & & \vdots \\ v_n(t_1) & \cdots & v_n(t_m) \end{pmatrix},$$

$$U = \frac{1}{2} \operatorname{diag}(-e'_1, e'_2, \dots, (-1)^m e'_m),$$

wobei

$$e'_i = \sum_{v=1}^n x_v v'_v(t_i) - f'(t_i) \quad i = 1, \dots, m.$$

Die Teilmatrix 0 ist die Nullmatrix und  $V^T$  ist die zu  $V$  transponierte Matrix. Man beachte, daß die auftretenden Matrizen von  $x$  und  $t$  abhängen.

Mit den vorstehenden Bezeichnungen können wir nun zeigen:

(12) LEMMA. *Es sei  $e'_i e'_{i+1} < 0$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$ , und  $V$  habe den Rang  $n$ . Dann ist die Matrix  $DG(x, t)$  nichtsingulär.*

*Beweis.* Unter den gegebenen Voraussetzungen existiert die Matrix  $U^{-1}$  und ist entweder positiv oder negativ definit. Da die Matrix  $V$  den Rang  $n$  hat, folgt daraus, daß die Matrix

$$B := VU^{-1}V^T$$

nichtsingulär ist. Wir betrachten nun das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & V \\ V^T & U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \quad (13)$$

mit den Unbekannten  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $s \in \mathbb{R}^m$  und der aus  $g \in \mathbb{R}^n$  und  $h \in \mathbb{R}^m$  gebildeten rechten Seite. Das System (13) ist gleichbedeutend mit

$$Vs = g, \quad V^T y + Us = h.$$

Daraus folgt  $U^{-1}V^T y + s = U^{-1}h$  sowie  $VU^{-1}V^T y + g = VU^{-1}h$ , so daß sich die Gleichungen

$$By = VU^{-1}h - g, \quad s = U^{-1}(h - V^T y) \quad (14)$$

ergeben. Umgekehrt folgt aus (14) wieder (13), so daß (13) und (14) dieselben Lösungen haben. Da  $B$  nichtsingulär ist, haben die Gleichungen (14) für jedes  $g$  und jedes  $h$  eine eindeutige Lösung. Da somit auch (13) stets eindeutig lösbar ist, folgt unter Berücksichtigung von (11) die Regularität von  $DG(x, t)$ . ■

Da (13) und (14) dieselbe Lösung haben, ist ersichtlich, daß in jedem Schritt des Newton-Verfahrens zur Lösung von (4) nur ein lineares Gleichungssystem der Form

$$By = r, \quad B = VU^{-1}V^T$$

gelöst werden muß. Die Struktur von  $B$  erleichtert darüberhinaus die Verwendung spezieller numerisch stabiler Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems. Wir gehen darauf später noch näher ein.

Die Voraussetzung  $e'_i e'_{i+1} < 0$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$ , in Lemma (12) ist nicht einschneidend; sie ist in einer Umgebung der Lösung erfüllt, da für die Lösung  $(x, t)$  der gegebenen Approximationsaufgabe die Zahlen  $e'_i$  die Ableitung der Fehlerfunktion in deren Nullstellen mit Vorzeichenwechsel sind und deshalb alternierendes Vorzeichen haben.

Wir geben nun ein weiteres Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems (4) im Fall  $m > n$  an. Dazu schreiben wir (4) in der Form:

$$G_1(t) = 0, \quad (15)$$

$$G_2(x, t) = 0, \quad (16)$$

wobei die Funktion  $G_1$  die Komponenten  $g_1, \dots, g_n$  aus (5) und die Funktion  $G_2$  die Komponenten  $g_{n+1}, \dots, g_{n+m}$  aus (6) hat.

Durch (16) sind nun die Nullstellen  $t_1, \dots, t_m$  der Fehlerfunktion implizit als eine Funktion  $T$  des Koeffizientenvektors  $x \in \mathbb{R}^n$  gemäß folgender Vorschrift definiert:

$$t = T(x) : \Leftrightarrow G_2(x, t) = 0. \quad (17)$$

Durch Einsetzen in (15) erhält man das Gleichungssystem

$$H(x) := G_1(T(x)) = 0. \quad (18)$$

Auch das nichtlineare Gleichungssystem (18) kann wiederum mit dem Newton-Verfahren gelöst werden. Die auftretende Funktionalmatrix  $DH(x)$  läßt sich aus (17) und (18) wie folgt herleiten:

$$DH(x) = DG_1(T(x)) \cdot DT(x),$$

$$DT(x) = -D_t G_2(x, T(x))^{-1} \cdot D_x G_2(x, T(x)).$$

Mit den Bezeichnungen von (11) erhält man:

$$DG_1 = V \cdot 2 \operatorname{diag}(-1, 1, \dots, (-1)^m),$$

$$D_x G_2 = V^T,$$

$$D_t G_2 = U \cdot 2 \operatorname{diag}(-1, 1, \dots, (-1)^m).$$

Somit ergibt sich

$$DH(x) = -B = -VU^{-1}V^T.$$

Die gemäß (11) von  $x$  und  $t$  abhängenden Matrizen  $U$  und  $V$  werden dabei an der Stelle  $(x, T(x))$  berechnet.

Die Funktionalmatrix  $DH(x)$  ist unter den Voraussetzungen von Lemma (12) nichtsingulär.

Bei der numerischen Durchführung des Newton-Verfahrens zur Lösung von (18) läßt sich die Abbildung  $T$  durch die Anwendung effektiver eindimen-

sionaler Verfahren realisieren (z.B. eindimensionales Newton-Verfahren oder Sekantenmethode).

Wir gehen nun noch auf eine Möglichkeit ein, das bei den Newton-Verfahren zur Lösung der Gleichungssysteme (4) und (18) auftretende lineare Gleichungssystem

$$By = r, \quad B = VU^{-1}V^T, \quad (19)$$

mit einem numerisch stabilen Verfahren zu behandeln. Wie in Lemma (12) sei  $V$  eine  $(n \times m)$ -Matrix mit dem Rang  $n$  und

$$U = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$$

eine  $(m \times m)$ -Diagonalmatrix mit nur positiven (bzw. nur negativen) Diagonalelementen. Wir setzen o.E.d.A.  $\epsilon_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , voraus und definieren

$$U^{-1/2} = \text{diag}(1/(\epsilon_1)^{1/2}, \dots, 1/(\epsilon_m)^{1/2}).$$

Damit erhalten wir

$$B = (VU^{-1/2})(VU^{-1/2})^T,$$

so daß (19) zu einem Gleichungssystem der Form

$$AA^T y = r \quad (20)$$

wird. Ein numerisch stabiles Verfahren zur Lösung von (20) ergibt sich durch orthogonale Transformation von  $A$ . Für jede  $(m \times m)$ -Matrix  $Q$  mit  $QQ^T = I$  ( $I =$  Einheitsmatrix) hat das Gleichungssystem

$$(AQ)(AQ)^T y = r$$

dieselbe Lösung  $y$  wie (20). Wir wählen nun  $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_n$ , wobei die orthogonalen Matrizen  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , zu Householder-Transformationen (siehe z.B. Stoer [12] S.164) gehören, die die Matrix  $A$  in eine Matrix der Gestalt

$$AQ_1 Q_2 \cdots Q_n = (L \ 0)$$

überführen, wobei  $L$  eine untere  $(n \times n)$ -Dreiecksmatrix und  $0$  die Nullmatrix ist. Das Gleichungssystem (20) ist dann äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$LL^T y = r,$$

das in der üblichen Weise durch aufeinanderfolgendes Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen gelöst werden kann.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch anmerken, daß im Falle  $m < n$  weder das Gleichungssystem (4) noch das Gleichungssystem (18) mit dem Newton-Verfahren behandelt werden kann, da in diesem Fall die Funktionalmatrix stets singular ist. Der Fall  $m < n$  ist jedoch sehr selten. Für die Approximation bezüglich Tschebyscheff-Systemen folgt bereits aus Satz (9) die Aussage  $m \geq n$ .

#### 4. NICHTLINEARE $L^1$ -APPROXIMATION

Es sei  $A$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und

$$F: A \rightarrow C[a, b]$$

eine (Fréchet-) differenzierbare Abbildung. Wir setzen nun

$$V = \{F(x): x \in A\}.$$

In diesem Fall ist die Existenz einer  $L^1$ -Minimallösung für ein gegebenes  $f \in C[a, b]$  bezüglich  $V$  im allgemeinen nicht gewährleistet. Jede Minimallösung erfüllt jedoch das im folgenden Satz gegebene notwendige Kriterium. Wir bezeichnen mit  $F'_x$  die Ableitung der Abbildung  $F$  an der Stelle  $x$ .

(21) SATZ (siehe z.B. Rice [10]). *Es sei  $f \in C[a, b]$  und  $x \in A$  mit  $\text{meas } N(F(x) - f) = 0$ . Ist  $F(x)$  eine  $L^1$ -Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V = F(A)$ , so gilt:*

$$\int_a^b \text{sgn}((F(x) - f)(\xi)) F'_x(h)(\xi) d\xi = 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \quad \blacksquare \quad (22)$$

Unter den Bedingungen von Satz (21) heißt ein Element  $x \in A$  mit (22) ein stationärer Punkt. Ist  $F$  eine lineare Abbildung, so geht (22) in das Kriterium aus Satz (2) über, so daß im linearen Fall die stationären Punkte genau die Minimallösungen bestimmen. Obgleich (22) im nichtlinearen Fall im allgemeinen für Minimallösungen nicht hinreichend ist, kann es sinnvoll sein, eine nichtlineare Approximationsaufgabe durch die Suche nach einem stationären Punkt zu behandeln.

Analog zum linearen Fall können die stationären Punkte noch handlicher charakterisiert werden. Wir bezeichnen mit  $D_j F(x)$  die partielle Ableitung von  $F$  nach der  $j$ -ten Argumentskomponente an der Stelle  $x$ .

(23) LEMMA. *Es sei  $f \in C[a, b]$  und  $x \in A$  mit  $\text{meas } N(F(x) - f) = 0$ . Es sei  $m := m(F(x) - f) < \infty$  und es seien  $t_i, i = 1, \dots, m$ , mit  $a < t_1 < \dots$*

$< t_m < b$  sämtliche Nullstellen mit Vorzeichenwechsel von  $F(x) - f$  in  $[a, b]$ .  
Unter diesen Bedingungen ist  $x$  genau dann stationärer Punkt, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} D_j F(x)(\xi) d\xi = 0 \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei  $t_0 = a$  und  $t_{m+1} = b$  gesetzt ist. ■

Zur Bestimmung stationärer Punkte kann ganz analog zum linearen Fall vorgegangen werden. Ist für das gegebene  $f \in C[a, b]$  und einen stationären Punkt  $x \in A$  die Zahl  $m := m(F(x) - f)$  bekannt, so betrachte man das folgende  $(n + m)$ -dimensionale nichtlineare Gleichungssystem mit den Unbekannten  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ :

$$G(x, t) = 0 \quad (24)$$

mit  $G(x, t) = (g_1(x, t), \dots, g_{n+m}(x, t))^T$  und

$$g_j(x, t) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} D_j F(x)(\xi) d\xi \quad j = 1, \dots, n,$$

$$g_{n+i}(x, t) = F(x)(t_i) - f(t_i) \quad i = 1, \dots, m,$$

wobei wieder  $t_0 = a$  und  $t_{m+1} = b$  gesetzt ist.

Falls nun  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $t = (t_1, \dots, t_m)$  die Gleichung (24) erfüllen und darüberhinaus  $a < t_1 < \dots < t_m < b$  gilt und ferner die Funktion  $F(x) - f$  genau in den Punkten  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , das Vorzeichen wechselt, so folgt aus Lemma (23), daß  $x$  ein stationärer Punkt ist.

Um das Gleichungssystem (24) aufstellen zu können, benötigt man die Kenntnis der Zahl  $m = m(F(x) - f)$ . Zu ihrer Bestimmung kann man die Approximationsaufgabe wiederum mit einem globalen Näherungsverfahren behandeln. Als geeignetes Näherungsverfahren kommt z.B. die Anwendung eines Abstiegsverfahrens mit verallgemeinerten Gradienten in Frage (siehe z.B. Schultz [11]).

Auf das nichtlineare Gleichungssystem (24) kann unter geeigneten Voraussetzungen wiederum das Newton-Verfahren angewandt werden. Zur Aufstellung der Funktionalmatrix setzen wir die Existenz der zweiten partiellen Ableitungen

$$D_k D_j F(x) \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

voraus. Wir fordern, daß die Abbildungen

$$(x, \xi) \rightarrow D_k D_j F(x)(\xi) \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

stetig auf  $A \times [a, b]$  sind. Ferner seien sowohl  $f$  als auch sämtliche Funktionen  $F(x)$  für  $x \in A$  differenzierbar. Dann ergibt sich die Funktionalmatrix wie folgt:

$$DG(x, t) = \begin{pmatrix} S & V \\ V^T & U \end{pmatrix} \cdot 2 \operatorname{diag}(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, -1, 1, \dots, (-1)^m)$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{1n} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

$$s_{kj} = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} D_{\kappa} D_j F(x)(\xi) d\xi \quad k, j = 1, \dots, n,$$

$$V = \begin{pmatrix} D_1 F(x)(t_1) & \cdots & D_1 F(x)(t_m) \\ \vdots & & \vdots \\ D_n F(x)(t_1) & \cdots & D_n F(x)(t_m) \end{pmatrix},$$

$$U = \frac{1}{2} \operatorname{diag}(-e'_1, e'_2, \dots, (-1)^m e'_m),$$

$$e'_i = [F(x)]'(t_i) - f'(t_i) \quad i = 1, \dots, m.$$

Ähnlich dem Beweis von Lemma (12) ergibt sich, daß die Funktionalmatrix  $DG(x, t)$  regulär ist, wenn die Matrix

$$S - VU^{-1}V^T$$

nichtsingulär ist.

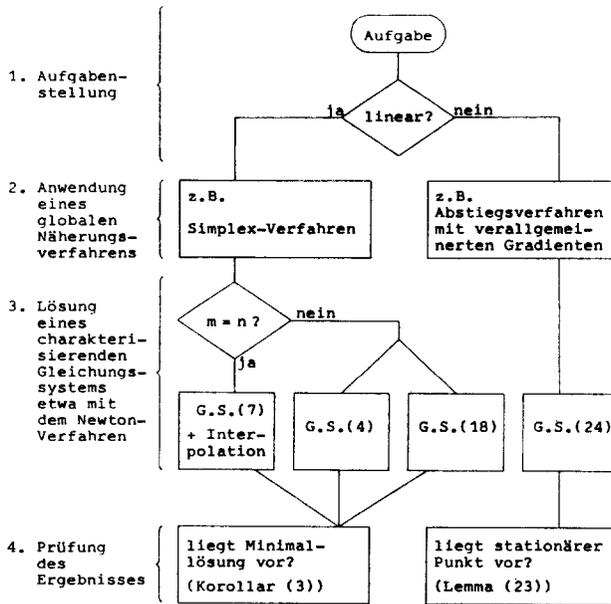
Bei der numerischen Durchführung des Newton-Verfahrens zur Lösung von (24) wird man im allgemeinen darauf verzichten, die Funktionalmatrix exakt zu berechnen. Häufig erhält man bereits mit einer Approximation der Funktionalmatrix durch eine Matrix aus Differenzenquotienten gute Ergebnisse.

## 5. ÜBERSICHT UND BEISPIELE

Die in diesem Aufsatz vorgeschlagenen Verfahren haben wir noch einmal in Diagramm 1 zusammengestellt. Zum Abschluß geben wir nun zwei numerische Beispiele an.

(25) BEISPIEL (Lineare  $L^1$ -Approximation). Auf dem Intervall  $[0, 1]$  soll für die Funktion

$$f(\xi) = \cosh(\xi) + \frac{1}{6\pi} \cos(6\pi\xi)$$



die beste  $L^1$ -Approximierende der Form

$$v(\xi) = x_1 + x_2 \xi^2$$

mit  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  berechnet werden. Die Aufgabe wurde durch Anwendung des Newton-Verfahrens auf das Gleichungssystem (18) gelöst. Als Startwerte wurden aus der Anschauung  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 0.5$  gewählt. Es ergab sich  $m = 6$ . Die numerischen Ergebnisse des Newton-Verfahrens sind in Tabelle I zusammengestellt. Die Rechnung wurde mit einem SR-52 von Texas Instruments durchgeführt.

Aus Korollar (3) ergibt sich, daß im letzten Schritt die Minimallösung erreicht ist. Für die Minimallösung  $v$  gilt

$$\int_0^1 |(v - f)(\xi)| d\xi = 0.0341531788.$$

Die Fehlerkurve  $v - f$  ist in Bild 1 dargestellt. ■

(26) BEISPIEL (Nichtlineare  $L^1$ -Approximation). Auf dem Intervall  $[0, 2]$  soll für die Funktion

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi(1 + \xi^2)}$$

TABELLE I

		Start	1. Iteration	2. Iteration	3. Iteration
$x$	$x_1$	1.0	0.9941568015	0.9943236864	0.9943239487
	$x_2$	0.5	0.5416315305	0.5422765544	0.5422754739
$H(x)$		-0.097	-0.0045	0.000001	0.0
		-0.073	-0.0021	0.0000014	0.0
$T(x)$	$t_1$	0.0833353434	0.0888603938	0.0886887819	0.0886885287
	$t_2$	0.2498373244	0.2465303537	0.2467407238	0.2467409244
	$t_3$	0.4179455738	0.4165480003	0.4162754795	0.4162754060
	$t_4$	0.5786046519	0.5868309755	0.5872270222	0.5872269099
	$t_5$	0.7647180810	0.7458149453	0.7452831587	0.7452835006
	$t_6$	0.8887051595	0.9156101077	0.9162802115	0.9162796010

eine beste  $L^1$ -Approximierende der Form

$$F(x)(\xi) = x_1 + \sum_{\nu=1}^3 x_{2\nu} \cos(x_{2\nu+1}\xi)$$

mit  $x = (x_1, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7$  berechnet werden. Die Aufgabe wurde durch die Anwendung des Newton-Verfahrens auf das Gleichungssystem (24) behandelt. Dabei wurde die Funktionalmatrix durch eine Matrix aus Differenzenquotienten ersetzt. Einen Startwert für die Newton-Iteration erhielten wir aus der Anwendung eines Abstiegsverfahrens (siehe Schultz [77]). Dabei ergab sich  $m = 7$ . Die Rechnung wurde auf der Rechenanlage TR 440 des Rechenzentrums der Universität Hamburg durchgeführt. Nach drei Iterationsschritten lieferte das Newton-Verfahren die Lösung des Gleichungssystems (24) mit den Parametern

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1782533506, & x_2 &= 0.1213288041, & x_3 &= 1.6274675333, \\ x_4 &= 0.0170739910, & x_5 &= 3.7820634483, & x_6 &= 0.0015367488, \\ x_7 &= 6.3274057087, \end{aligned}$$

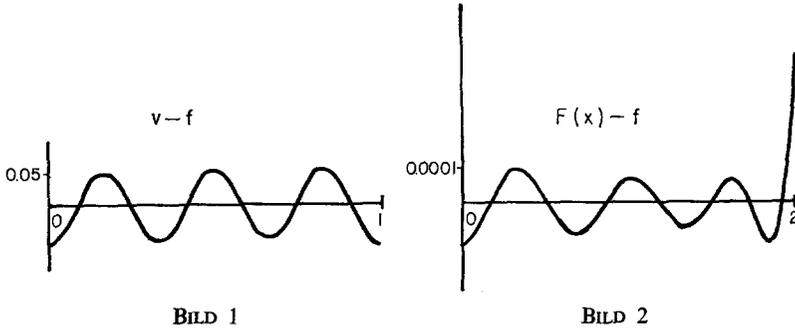
und den Nullstellen von  $F(x) - f$

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.1758905071, & t_2 &= 0.5244746378, & t_3 &= 0.8645732649, \\ t_4 &= 1.1907621506, & t_5 &= 1.4930126873, & t_6 &= 1.7515360783, \\ t_7 &= 1.9332964073. \end{aligned}$$

Aus Lemma (23) folgt, daß  $x = (x_1, \dots, x_7)$  ein stationärer Punkt ist. Es gilt

$$\int_0^2 |(F(x) - f)(\xi)| d\xi = 0.0001217626.$$

Die Fehlerkurve  $F(x) - f$  ist in Bild 2 dargestellt. ■



#### LITERATUR

1. I. BARRODALE UND F. D. K. ROBERTS, An improved algorithm for discrete  $L_1$  linear approximation, *SIAM J. Numer. Anal.* **10**, No. 5 (1973), 839–848.
2. E. W. CHENEY, Applications of fixed-point theorems to approximation theory, in "Theory of Approximation with Applications" (A. G. Law and B. N. Sahney, Eds.), Academic Press, New York, 1976.
3. S.-Å. GUSTAFSON, Nonlinear systems in semi-infinite programming, in "Solution of Nonlinear Algebraic Equations" (G. B. Byrnes and C. A. Hall, Eds.), Academic Press, New York, 1973.
4. C. R. HOBBY UND J. R. RICE, A moment problem in  $L_1$  approximation, *Proc. Amer. Math. Soc.* (1965), 665–670.
5. W. KRABS, Persönliche Mitteilung.
6. B. R. KRIPKE UND T. J. RIVLIN, Approximation in the metric of  $L^1(X, \mu)$ , *Trans. Amer. Math. Soc.* **119** (1965), 101–122.
7. P. LAASONEN, Einige Sätze über Tschebyscheffsche Funktionensysteme, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A* **52** (1949).
8. C. A. MICCHELLI, Best  $L^1$  approximation by weak Chebyshev systems and the uniqueness of interpolating perfect splines, *J. Approximation Theory* **19** (1977), 1–14.
9. J. R. RICE, "The Approximation of Functions," Vol. I, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964.
10. J. R. RICE, On nonlinear  $L_1$  approximation, *Arch. Rational Mech. Anal.* **17** (1967), 61–66.
11. R. SCHULTZ, "Ein Abstiegsverfahren für Approximationsaufgaben in normierten Räumen," *Numerische Mathem.* **31** (1978), 77–95.
12. J. STOER, "Einführung in die numerische Mathematik I," 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1976.